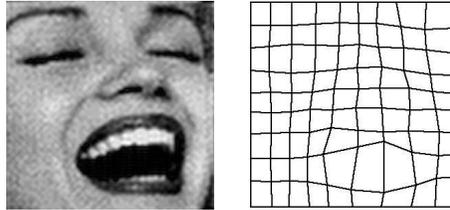


Entwurf diffraktiver Strahlformer mit der Methode der finiten Elemente



Eine Studienarbeit von

Pawel Wocjan

am

Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme
Fakultät für Informatik, Universität Karlsruhe (TH)

unter Betreuung von

Prof. Dr. Th. Beth
Dipl.-Inform. M. Schmid

Sommersemester 1997

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Die Methode der stationären Phase	6
3	Analytische Lösungen	6
4	Die Methode der finiten Elemente	8
4.1	Netze mit Rechteckstopologie	8
4.2	Netze mit Dreieckstopologie	14
4.3	Netze für allgemeine Wellenfronten	18
4.4	Bestimmung der Phasenfunktion	22
5	Vergleich	24
6	Schlußbetrachtung	26

1 Einführung

Eines der grundlegenden Probleme der diffraktiven Optik ist es, ein diffraktives Element (DE) mit der Transmissionsfunktion T_{DE} zu finden, die zu einem gegebenen Eingangssignal f_1 ein zuvor definiertes Ausgangssignal f_2 erzeugt. Die Transmissionsfunktion T_{DE} ist eine komplexe Funktion der reellen Ebene, d.h.

$$T_{DE} : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{C} \\ (x, y) & \mapsto A(x, y) \exp(i\phi(x, y)). \end{cases}$$

Die Amplitude $A(x, y)$ nimmt Werte aus dem Bereich $[0, 1]$ an, wobei 0 völlige Absorption und 1 völlige Transparenz bedeutet. Die Phasenverzögerung $\phi(x, y)$ stammt aus dem Bereich $[0, 2\pi)$. In vielen praktischen Fällen ist nur die Intensität des Ausgangssignals $|f_2|$ wichtig, die Phase kann beliebig sein. Wenn man von dem optischen Aufbau in Abbildung 1 ausgeht, wird also eine Transmissionsfunktion T_{DE} gesucht, die

$$\mathcal{F}(T_{DE}f_1) = f_2$$

erfüllt. Die Wellenausbreitung wird durch die Fouriertransformation \mathcal{F} beschrieben (siehe [Aag93]).

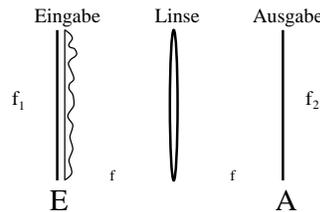


Abbildung 1: Die Eingabe- und Ausgabeebene befinden sich im Abstand f von der Linse.

Leider kann nicht jede Transmissionsfunktion T_{DE} technisch realisiert werden. Die vorhandenen Mittel schränken die Klasse der herstellbaren diffraktiven Elemente deutlich ein. Diffraktive Elemente, die sowohl die Amplitude als auch die Phase modulieren, lassen sich noch nicht zufriedenstellend herstellen. Deshalb muß man sich in der Regel auf diffraktive Amplitudenelemente oder diffraktive Phasenelemente beschränken. Die Amplitudenelemente haben den großen Nachteil der Energieabsorption. Die Energie des Signals f_1 kann nicht vollständig für das Signal f_2 ausgenutzt werden. Außerdem wird das diffraktive Amplitudenelement erwärmt, was bei großen Energiemengen, die bei manchen Anwendungen zur Materialverarbeitung auftreten, sogar zur Zerstörung führen kann.

Im folgenden werden nur Phasenelemente behandelt, die im Idealfall keine Energie, in der Realität jedoch eine geringe Menge, absorbieren. Ein

diffraktives Phasenelement (DPE) wird durch eine Transmissionsfunktion T_{DPE}

$$T_{DPE} : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{C} \\ (x, y) & \longmapsto \exp(i\phi(x, y)) \end{cases}$$

beschrieben, wobei die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ die Phasenverteilung angibt.

2 Die Methode der stationären Phase

Wir wollen die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ eines Phasenelements bestimmen, das einen Punkt $T(x, y)$ der Ausgabebene A ausleuchtet, wenn im Punkt (x, y) der Eingabebene E beleuchtet wird (siehe Abbildung 2). Es soll also ein

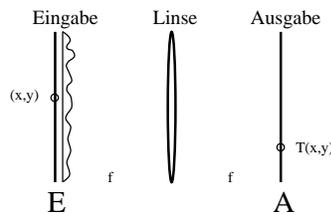


Abbildung 2: Realisierung einer geometrischen Transformation T mit einem DPE

Phasenelement berechnet werden, das eine gegebene geometrische Transformation T von der Eingabe- in die Ausgabebene realisiert. Nach der Methode der stationären Phase (siehe [Aag93] und [Aag97]) muß die Phasenverteilung $\phi(x, y)$ im kontinuierlichen Fall so gewählt werden, daß

$$\nabla\phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda f}T(x, y)$$

gilt, um die geometrische Transformation T zu realisieren. Die Wellenlänge ist λ .

3 Analytische Lösungen

Betrachten wir das Problem, eine beliebige Wellenfront f_1 in eine Wellenfront f_2 , bei der nur die Intensität vorgegeben ist, mit einem diffraktiven Phasenelement zu transformieren. Da die Phase der Wellenfront f_1 im Phasenelement codiert werden kann, nehmen wir ab jetzt oBdA an, daß die Phase von f_1 konstant ist.

Bei den analytischen Algorithmen (siehe [Aag97]) wird im ersten Schritt eine geometrische Transformation T berechnet, die die Intensität $|f_1|$ in die Intensität $|f_2|$ umverteilt. Die Abbildung 3 soll dem intuitiven Verständnis der Idee der Energieumverteilung dienen.

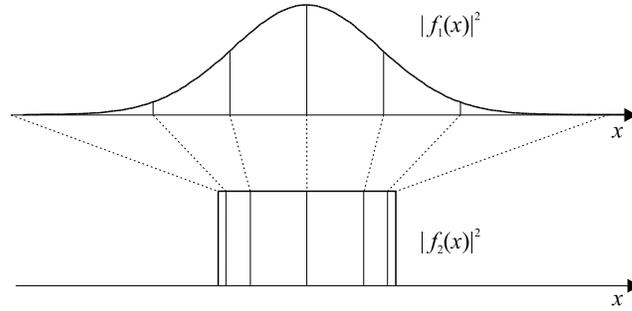


Abbildung 3: Energieumverteilung durch eine geometrische Transformation T .

Allerdings kann diese geometrische Transformation T nicht für beliebige Wellenfronten berechnet werden. Es können nur Transformationen eines separablen Eingangssignals in ein separables Ausgangssignal oder eines isotropen Eingangssignals in ein isotropes Ausgangssignal berechnet werden, da sich dann die Transformation T auf einen einfachen eindimensionalen Fall zurückführen läßt.

Im zweiten Schritt wird mit der Methode der stationären Phase die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ des Phasenelements berechnet, das die geometrische Transformation T realisiert.

Die Idee des Separabilisierungsoperators SepOp erlaubt es, eine geeignete geometrische Transformation T zu berechnen, auch wenn die Wellenfronten nicht in den obigen Klassen liegen. Dazu werden beliebige Signale auf möglichst ähnliche separable Signale abgebildet.

$$\text{SepOp} : f(x, y) \mapsto \int_{\xi_1=-\infty}^{\infty} f(\xi_1, y) d\xi_1 \int_{\xi_2=-\infty}^{\infty} f(x, \xi_2) d\xi_2$$

Ein Beispiel ist in Abbildung 4 dargestellt. Wenn wir das Signal auf ein separables Signal abgebildet haben, können wir die analytische Methode anwenden.



Abbildung 4: Abbildung eines nichtseparablen Signals auf ein ähnliches separables Signal.

Das so erhaltene Phasenelement erzeugt ein bereits ähnliches Signal zu

f_2 und stellt somit einen guten Startwert für den iterativen Fouriertransformationsalgorithmus (IFTA) (siehe [Fie80], [Ger72] und [Wyr88]), der es noch weiter optimiert.

Die Methode der finiten Elemente soll eingesetzt werden, falls die geometrische Transformation T nicht analytisch berechnet werden kann. Mit ihr sollen günstigere Startwerte für den IFTA als mit dem Separabilisierungsoperator erreicht werden.

4 Die Methode der finiten Elemente

Wir unterteilen die Ebene E und die Ebene A in finite Flächenelemente. Zu jedem Flächenelement der Eingabeebene E gibt es ein korrespondierendes Flächenelement der Ausgabeebene A . Wenn es uns gelingt, die Flächenelemente derart anzuordnen, daß jeweils korrespondierende Flächenelemente die gleiche Energie enthalten und dann eine geometrische Transformation berechnen, die die Energie der Flächenelementen der Ebene E in jeweils korrespondierenden Flächenelemente der Ebene A umlenkt, können wir das gewünschte Phasenelement realisieren.

Bei der Anwendung der finiten Elemente für den Entwurf von diffraktiven Elementen müssen wir zunächst eine für das vorliegende Problem geeignete Netztopologie auswählen. Ein Netz wird durch eine diskrete Anzahl von Netzknoten, die eindeutig durch ein Paar (i, j) adressiert werden, gebildet. Das Paar (i, j) stammt aus einem von der Topologie abhängigen Definitionsbereich.

Wir legen über die Eingabeebene E und die Ausgabeebene A zwei topologisch äquivalente Netze, indem wir für alle (i, j) -Paare die Koordinaten (x_{ij}, y_{ij}) der Knoten $in(i, j)$ des Netzes in der Eingabeebene E und die Koordinaten $(\phi_x^{ij}, \phi_y^{ij})$ der Knoten $out(i, j)$ des Netzes in der Ausgabeebene A festlegen.

Die Netzknoten $in(i, j)$ und $out(i, j)$ bilden finite Flächenelemente, deren Form von der jeweils gewählten Netztopologie abhängt. Jedes finite Flächenelement unterteilt die Ebene E bzw. A und enthält eine bestimmte Energie. Wenn es uns gelingt die beiden Netze so zu optimieren, daß korrespondierende Flächenelemente in der Ebene E und A die gleiche Energie einschließen, können wir mit der Approximation der stationären Phase die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ eines Phasenelements berechnen, das die gewünschte Transformation realisiert.

4.1 Netze mit Rechteckstopologie

Zunächst werden zwei Spezialfälle aus [Dre97] vorgestellt. Die darin verwendeten Methoden werden dahingehend erweitert, daß wir Netze für Wellenfronten mit beliebigen Intensitätsverteilungen generieren können.

Betrachten wir das Problem, einen Kreis mit konstanter Intensität in ein Quadrat mit konstanter Intensität zu transformieren. Da die Intensität innerhalb der beiden Figuren konstant ist, schließen gleich große Flächenelemente gleich viel Energie ein.

Ein Netz mit Rechteckstopologie ist in Abbildung 5 gezeigt. Die Werte für i, j stammen aus dem Bereich $0, \dots, s-1$, wobei s die Gesamtanzahl der Netzknoten in einer Richtung angibt. Wir legen über das Quadrat in

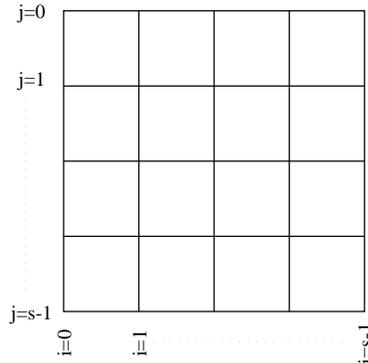


Abbildung 5: Rechteckstopologie

der Ausgabebene A ein Netz, d.h. wir definieren eine Abbildung, die jedem (i, j) -Paar die Koordinaten $(\phi_x^{ij}, \phi_y^{ij})$ des Knotens $out(i, j)$ zuordnet. Die Werte der Koordinaten $(\phi_x^{ij}, \phi_y^{ij})$ stammen aus dem Bereich $[-0.25, 0.25]$. Die Koordinaten $(\phi_x^{ij}, \phi_y^{ij})$ werden so gewählt, daß das Quadrat in gleich große quadratische Flächenelemente unterteilt wird und sein Schwerpunkt im Ursprung liegt.

Wir müssen nun ein Netz über den Kreis in der Eingabebene E so legen, daß alle finiten Flächenelemente gleich groß sind. Diese Aufgabe wird mit einem Netzgenerierungsalgorithmus gelöst, der aus den folgenden drei Schritten besteht:

1. Bestimmung der Abbildung für die Randknoten.
2. Generierung der inneren Knoten mit einer Interpolationstechnik.
3. Iterative Bewegung der Knoten, um Randbedingungen zu erfüllen.

Der erste Schritt ist einfach zu realisieren, indem wir die Randknoten auf einem Ursprungskreis mit Radius $r = 0.25$ gleichmäßig anordnen. Der zweite Schritt wird mit der Vier-Punkt-Interpolationstechnik aus [Atk94] realisiert. Ein innerer Knotenpunkt $P_0 = (x_0, y_0)$ wird durch seine vier zugehörigen Randknoten $P_l = (x_l, y_l), l = 1, \dots, 4$ (siehe Abbildung 6), interpoliert

$$P_0 := \sum_{l=1}^4 g_l P_l. \quad (1)$$

Die Gewichte g_l werden durch folgende Formeln

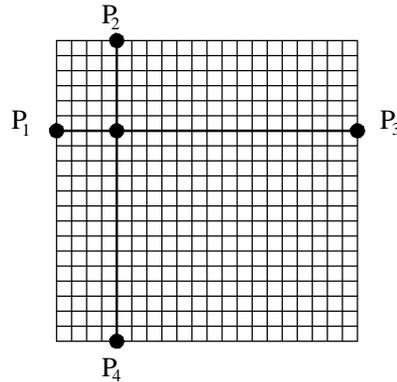


Abbildung 6: Die vier zugehörigen Randknoten.

$$g_1 = \frac{d_2 d_3 d_4}{(d_1 + d_2)(d_1 d_2 + d_3 d_4)}$$

$$g_2 = \frac{d_1 d_3 d_4}{(d_1 + d_2)(d_1 d_2 + d_3 d_4)}$$

$$g_3 = \frac{d_1 d_2 d_4}{(d_3 + d_4)(d_3 d_4 + d_1 d_2)}$$

$$g_4 = \frac{d_1 d_2 d_3}{(d_3 + d_4)(d_3 d_4 + d_1 d_2)}$$

bestimmt. Die $d_k := [(i_0 - i_k)^2 + (j_0 - j_k)^2]^{1/2}$ sind die euklidischen Abstände im (i, j) -Bereich. Die Interpolationsformel 1 ist linear in den Koordinaten der Randpunkte P_1, \dots, P_4 . Das Netz, das nach den ersten beiden Schritten des Generierungsalgorithmus für $s = 20$ entsteht, ist in Abbildung 7 dargestellt. Viele Netzgenerierungsalgorithmen glätten die Verteilung der

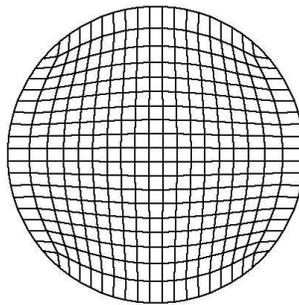


Abbildung 7: Das mit der Vier-Punkt-Interpolationstechnik berechnete Netz.

inneren Knoten mit Hilfe des diskreten Laplaceoperators. Das Netz nach

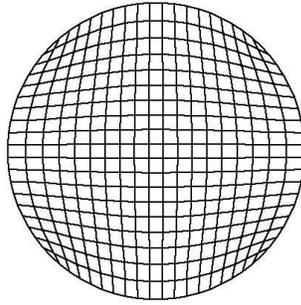


Abbildung 8: Das mit dem Laplaceoperator geglättete Netz.

der Laplace-Glättung ist in Abbildung 8 gezeigt. Ein innerer Knoten P_0 ist von vier Nachbarn $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1 \dots, 4$ (siehe Abbildung 9) umgeben. Der Schwerpunkt $C = (x_c, y_c)$ dieser Knoten befindet sich in

$$C := \frac{1}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4). \quad (2)$$

Die Differenz von P_0 und C ist $D := C - P_0$. Sie ist die diskrete Vier-Punkt-Approximation des Laplaceoperators im zweidimensionalen Fall. Der innere Knoten P_0 wird in Richtung von C bewegt, d.h.

$$P'_0 := P_0 + \alpha D, \quad (3)$$

so daß die neue Differenz $D' := C - P'_0$ kleiner wird. Die Konstante α kontrolliert die Schrittweite im Algorithmus. Wie kann dieses Verfahren ver-

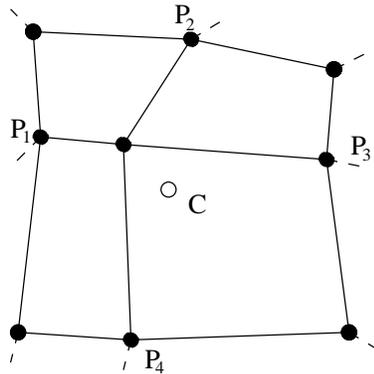


Abbildung 9: Der innere Knoten P_0 ist von den vier Nachbarn P_1, \dots, P_4 umgeben

wendet werden, um ein Netz mit gleich großen Flächenelementen zu erhalten? Betrachten wir einen inneren Punkt P_0 und seine acht Nachbarpunkte P_1, \dots, P_8 (siehe Abbildung 10). Um gleich große Flächenelemente zu er-

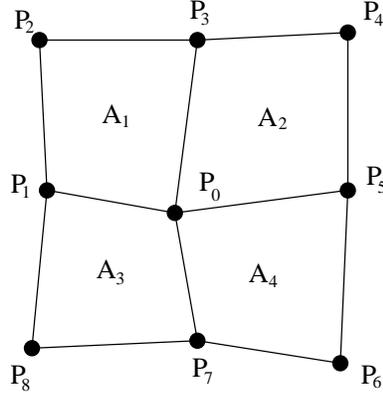


Abbildung 10: Acht Nachbarknoten eines inneren Knotens P_0

halten, fordern wir, daß die ideale Position C für den inneren Punkt P_0 so gewählt wird, daß die Flächen A_1, \dots, A_4 folgende Gleichungen

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \quad (4)$$

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4 \quad (5)$$

erfüllen. Diese Gleichungen sind zu den Bedingung $A_1 = A_4$ und $A_2 = A_3$ äquivalent. Wenn sie für alle inneren Knoten gleichzeitig erfüllt sind, erhalten wir ein „Schachbrett“, bei dem alle schwarzen und alle weißen Rechtecke gleich groß sind. Alle Rechtecke sind dann fast gleich groß. Wenn wir die beiden Gleichungen in den Koordinaten der acht Nachbarknoten P_1, \dots, P_8 und der idealen Position $C(x_c, y_c)$ ausdrücken, bekommen wir zwei lineare Gleichungen. Die Lösung für die Koordinaten x_c und y_c sind dann

$$x_c = \frac{bf - de}{bc - ad} \quad (6)$$

$$y_c = \frac{af - ce}{bc - ad}, \quad (7)$$

wobei

$$a = y_2 - y_8 - y_6 + y_4$$

$$b = x_2 - x_8 - x_6 + x_4$$

$$c = y_8 - y_6 - y_4 + y_2$$

$$d = x_8 - x_6 - x_4 + x_2$$

$$e = x_1 \cdot (y_2 - y_8) + x_5 \cdot (y_4 - y_6) + y_1 \cdot (x_8 - x_2) + y_5 \cdot (x_6 - x_4)$$

$$f = x_3 \cdot (y_2 - y_4) + x_7 \cdot (y_8 - y_6) + y_3 \cdot (x_4 - x_2) + y_7 \cdot (x_6 - x_8).$$

gesetzt sind. Wir definieren wieder $D := C - P_0$ als die Abweichung von P_0 von der idealen Position C . Die neue Position P'_0 wird wie in Gleichung 3

definiert. Dieser Schritt wird so lange für alle inneren Knoten wiederholt, bis sie sich nicht mehr bewegen. Das so entstandene Netz ist in Abbildung 11 gezeigt. Bei diesem Algorithmus wurden die Randknoten nicht bewegt. Wir

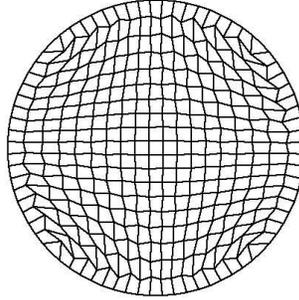


Abbildung 11: Das bei der Abbildung eines Quadrats auf einen Kreis entstandene Netz. Das Netz wurde dabei so optimiert, daß alle Flächenelemente gleich groß sind.

erhalten ein besseres Ergebnis, wenn auch die Randknoten bewegt werden. Betrachten wir einen Randknoten, der kein Eckpunkt ist. Dieser Knoten hat fünf Nachbarn (siehe Abbildung 12). Die Bedingung $A_1 = A_2$ ergibt

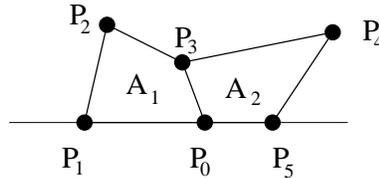


Abbildung 12: Fünf Nachbarpunkte eines Randknotens.

eine lineare Gleichung für die Koordinaten x_c und y_c der idealen Position C

$$ax_c + by_c = e, \quad (8)$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= y_1 - 2y_3 + y_5 \\ b &= -x_1 + 2x_3 - x_5 \\ e &= x_3y_4 - y_3x_4 + x_4y_5 - y_4x_5 - (x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3). \end{aligned}$$

Wir wissen nun, auf welcher Geraden die ideale Position C liegt. Die zweite Bedingung, die die ideale Position C festlegt, ergibt sich aus der Tatsache, daß der Knoten auf dem Kreis liegen muß. Es gibt zwei Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis. Es wird der Schnittpunkt genommen, der die kleinere Entfernung zu den Knoten P_1 und P_5 hat. Hier kann nicht die Gleichung 3 benutzt werden, um den Knoten P_0 in Richtung C zu bewegen, da sonst die

neue Position P'_0 nicht auf dem Kreis liegen würde. Es wird daher die Differenz des Winkels zwischen P_0 und C betrachtet. Das Netz, bei dem auch die Randknoten bewegt wurden, ist in Abbildung 13 dargestellt. Das Ergebnis ist geringfügig besser.

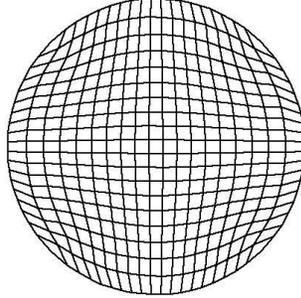


Abbildung 13: Das bei der Abbildung eines Quadrats auf einen Kreis entstandene Netz. Das Netz wurde dabei so optimiert, daß alle Flächenelemente gleich groß sind.

4.2 Netze mit Dreieckstopologie

Betrachten wir das Problem, einen Kreis mit konstanter Intensität in ein Dreieck mit konstanter Intensität zu transformieren. Für die Lösung dieses Problems ist die Rechteckstopologie nicht mehr geeignet, da es sehr umständlich wäre, das Dreieck mit Rechtecken auszufüllen. Es ist viel einfacher dreieckige Flächenelemente zu benutzen.

Es werden nur die notwendigen Änderungen im Konzept beschrieben, um Netze mit einer Dreieckstopologie zu optimieren. Ein Netz mit Dreieckstopologie ist in Abbildung 14 dargestellt. Der Definitionsbereich der (i, j) -Paare muß geändert werden. Die Netzknoten werden hier durch (i, j) -Paare bezeichnet, wobei j die Werte $j = 0, \dots, s - 1$ und i die Werte $i = 0, \dots, j$ annehmen. Die Gesamtzahl der Zeilen wird mit s bezeichnet. Es wird ein Sechs-Punkt-Algorithmus aus [Dre97] verwendet, bei dem ein innerer Knoten P_0 durch seine sechs zugehörigen Randknoten P_1, \dots, P_6 (siehe Abbildung 15)

$$P_0 := \sum_{l=1}^6 g_l P_l \quad (9)$$

interpoliert wird. Die Gewichte werden mit folgenden Formeln

$$g_1 = \frac{d_2 d_3 d_4 d_5 d_6}{(d_1 + d_2)(d_1 d_2 + d_3 d_4)(d_1 d_2 + d_5 d_6)}$$

$$g_2 = \frac{d_1 d_3 d_4 d_5 d_6}{(d_1 + d_2)(d_1 d_2 + d_3 d_4)(d_1 d_2 + d_5 d_6)}$$

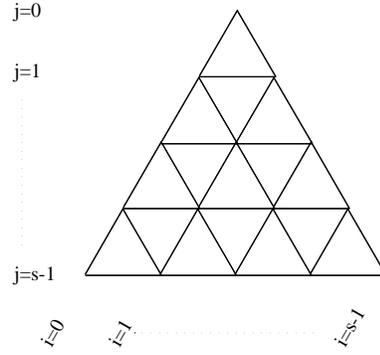


Abbildung 14: Dreieckstopologie

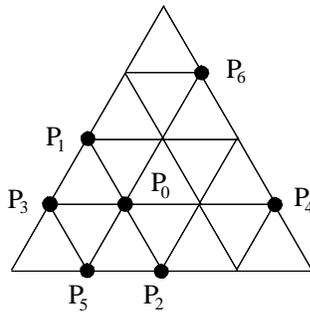


Abbildung 15: Die sechs zugehörigen Randknoten zu dem inneren Randknoten P_0

$$g_3 = \frac{d_1 d_2 d_4 d_5 d_6}{(d_3 + d_4)(d_3 d_4 + d_1 d_2)(d_3 d_4 + d_5 d_6)}$$

$$g_4 = \frac{d_1 d_2 d_3 d_5 d_6}{(d_3 + d_4)(d_3 d_4 + d_1 d_2)(d_3 d_4 + d_5 d_6)}$$

$$g_5 = \frac{d_1 d_2 d_3 d_4 d_6}{(d_5 + d_6)(d_5 d_6 + d_1 d_2)(d_5 d_6 + d_3 d_4)}$$

$$g_6 = \frac{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5}{(d_5 + d_6)(d_5 d_6 + d_1 d_2)(d_5 d_6 + d_3 d_4)}$$

berechnet. Die Interpolationsformel 9 ist linear in den Koordinaten der Knoten P_1, \dots, P_6 . Die Gewichte d_k hängen von der Entfernung des Knoten von den zugehörigen Randknoten P_1, \dots, P_6 ab. Das damit berechnete Netz ist in Abbildung 16 dargestellt. Die Verallgemeinerung des Laplaceoperators ist naheliegend. Es wird dabei der Schwerpunkt C der sechs Nachbarknoten benutzt. Das mit dem Laplaceoperator geglättete Netz ist in Abbildung 17 dargestellt. Für die Berechnung der optimalen Position eines inneren Knoten ist der Acht-Punkt-Algorithmus nicht geeignet, da er nicht an die Dreieckstopologie angepaßt ist. Deswegen wird ein Neun-Punkt-Algorithmus verwenden

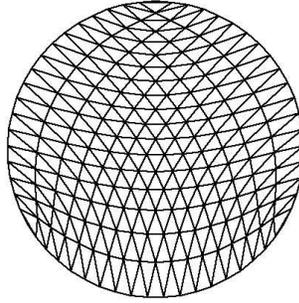


Abbildung 16: Das mit der Sechs-Punkt-Interpolationstechnik berechnete Netz.

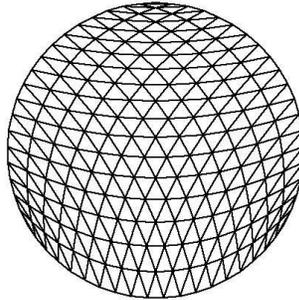


Abbildung 17: Das mit dem Laplaceoperator geglättete Netz.

det. Betrachten wir einen inneren Knoten P_0 , der von neun Nachbarknoten P_1, \dots, P_9 umgeben ist (siehe Abbildung 18). Um ein Netz mit gleich großen Flächenelementen zu erhalten, fordern wir, daß die Flächen folgende Gleichungen

$$A + C + D + H + I = A + C + B + E + F, \quad (10)$$

$$E + F + G + H + I = A + C + B + E + F, \quad (11)$$

oder äquivalent

$$D + H + I = B + E + F, \quad (12)$$

$$G + H + I = A + C + B \quad (13)$$

erfüllen. Wenn man die beiden Gleichungen in den Koordinaten der Nachbarknoten und der idealen Position C ausdrückt, bekommt man zwei lineare Gleichungen für x_c und y_c . Die Lösungen sind

$$x_c = \frac{ed - fb}{ad - cb} \quad (14)$$

$$y_c = \frac{af - ce}{ad - cb}, \quad (15)$$

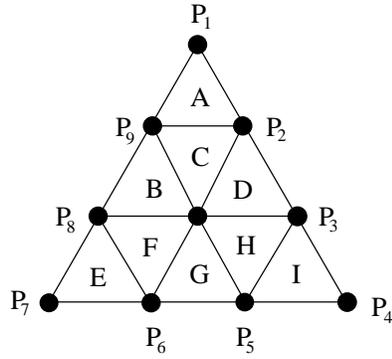


Abbildung 18: Neun Nachbarknoten eines inneren Knotens P_0

wobei

$$\begin{aligned}
 a &= y_5 + y_6 - y_2 - y_9 \\
 b &= x_2 + x_9 - x_5 - x_6 \\
 c &= y_6 + y_8 - y_2 - y_3 \\
 d &= x_2 + x_3 - x_6 - x_8 \\
 e &= x_7(y_6 - y_8) + y_7(x_8 - x_6) + x_4(y_5 - y_3) + y_4(x_3 - x_5) \\
 &\quad + x_9y_8 - y_9x_8 + x_2y_3 - x_3y_2 \\
 f &= x_1(y_9 - y_2) + y_1(x_2 - x_9) + x_4(y_5 - y_3) + y_4(x_3 - x_5) \\
 &\quad - x_6y_5 + y_6x_5 + x_9y_8 - y_9x_8
 \end{aligned}$$

gesetzt sind.

Das mit diesen Bedingungen optimierte Netz ist in Abbildung 19 dargestellt. Die Randknoten wurden dabei nicht bewegt. Betrachten wir einen

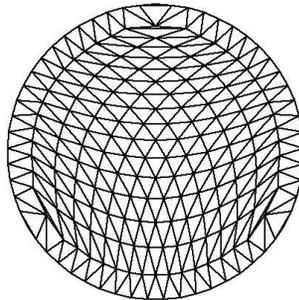


Abbildung 19: Das bei der Abbildung eines Dreiecks auf einen Kreis entstandene Netz. Das Netz wurde dabei so optimiert, daß alle Flächenelemente gleich groß sind.

Randknoten P_0 in Abbildung 20. Die Forderung, daß $A = B$ gilt, liefert eine

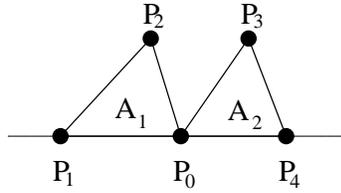


Abbildung 20: Der Randknoten hat fünf Nachbarknoten

lineare Gleichung für die Koordinaten x_c und y_c

$$ax_c + by_c = e, \quad (16)$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ b &= -x_1 + x_2 + x_3 - x_4, \\ e &= x_3y_4 - y_3x_4 - (x_1y_2 - y_1x_2) \end{aligned}$$

gesetzt sind. Die ideale Position C für den Randknoten wird dann wie im vorherigen Beispiel berechnet. Das so optimierte Netz ist in Abbildung 21 gezeigt.

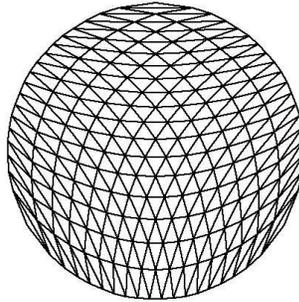


Abbildung 21: Das bei der Abbildung eines Dreiecks auf einen Kreis entstandene Netz. Das Netz wurde dabei so optimiert, daß alle Flächenelemente gleich groß sind.

4.3 Netze für allgemeine Wellenfronten

Betrachten wir das Problem, zwei Wellenfronten f_1 und f_2 mit beliebigen Intensitätsverteilungen mit Hilfe eines diffraktiven Phasenelements ineinander zu transformieren. Die Phase von f_1 kann oBdA als konstant angenommen werden. Bei der Wellenfront f_2 haben wir Phasenfrieheit, da uns nur die Intensitätsverteilung interessiert. In diesem Abschnitt wird die Idee der finiten Elemente aus [Dre97] erweitert, um auch bei beliebigen Intensitätsverteilungen eingesetzt werden zu können.

Die Ein- und Ausgabesignale liegen als quadratische Arrays *input* bzw. *output* vor. Die Werte $input(x_{pix}, y_{pix})$ und $output(x_{pix}, y_{pix})$ geben die Amplitude des Eingabe- bzw. des Ausgabesignals im Punkt (x_{pix}, y_{pix}) an. Die Koordinaten x_{pix} und y_{pix} stammen aus dem Bereich $[0, \dots, size - 1]$, wobei *size* die Größe der Arrays ist. Für die Ein- und Ausgabesignale werden topologisch äquivalente Netze mit demselben Algorithmus generiert.

Als Startwert nehmen wir ein quadratisches Netz mit Rechteckstopologie, das in gleich große quadratische Flächenelemente unterteilt ist. Die Koordinaten dieses Netzes stammen aus dem Bereich $[0, 1]$. In einem iterativen Prozeß werden die Knoten solange bewegt, bis jedes Flächenelement die gleiche Energie enthält.

Um die Energie in einem Flächenelement zu messen, müssen wir die Koordinaten seiner Knoten (x_k, y_k) mit $x_k, y_k \in [0, 1]$ in Pixelkoordinaten (x_{pix}^k, y_{pix}^k) mit $x_{pix}^k, y_{pix}^k \in [0, \dots, size - 1]$ entsprechend der Formeln

$$x_{pix}^k = \lfloor x_k \cdot (size - 1) + 0.5 \rfloor \quad (17)$$

$$y_{pix}^k = \lfloor y_k \cdot (size - 1) + 0.5 \rfloor \quad (18)$$

umrechnen. Wir bestimmen anschließend die Minimal- und Maximalwerte $x_{pix}^{min}, x_{pix}^{max}, y_{pix}^{min}$ und y_{pix}^{max} der x - und y -Koordinaten von (x_k, y_k) . Wir müssen dann nur die Koordinaten (x_{pix}, y_{pix}) mit $x_{pix} \in [x_{pix}^{min}, \dots, x_{pix}^{max}]$ und $y_{pix} \in [y_{pix}^{min}, \dots, y_{pix}^{max}]$ berücksichtigen. Wir rechnen die Pixelkoordinaten (x_{pix}, y_{pix}) in die Knotenkoordinaten (x, y) mit

$$x = \frac{x_{pix}}{size - 1} \quad (19)$$

$$y = \frac{y_{pix}}{size - 1} \quad (20)$$

um und überprüfen, ob sich (x, y) innerhalb des finiten Flächenelements befindet. Falls ja, dann wird die Energie des Pixels (x_{pix}, y_{pix}) zu der Energie des Flächenelements dazuaddiert.

Um festzustellen, ob sich ein Punkt $Q = (Q.x, Q.y)$ innerhalb eines Polygons P befindet wird das Halbstrahlverfahren aus [Schm96] verwendet. Der Algorithmus macht sich einen Satz zunutze, der besagt, daß jede Halbgerade, beginnend mit Q , das Polygon P genau dann mit ungerader Anzahl von Schnittpunkten schneidet, wenn Q im Inneren von P liegt. Der Algorithmus testet alle Kanten auf Schnitt mit der bei Q beginnenden Halbgeraden und überprüft die Schnitzzahl gemäß dem obigen Satz.

Um numerische Probleme beim Schnittpunkttest zu vermeiden werden Schnittpunkte ausschließlich dann gezählt, wenn die betrachtete Strecke einen echten Schnittpunkt mit dem Halbstrahl hat. Zusätzlich sind nur noch die Gebietswechsel zu betrachten. Hierfür werden folgende Prädikate definiert, von denen auch der folgende Algorithmus Gebrauch macht:

1. $P_i P_{i+1}$ schneidet den Halbstrahl genau dann, wenn gilt:

$$((P_i.y > Q.y) \wedge (P_{i+1}.y < Q.y)) \vee ((P_i.y < Q.y) \wedge (P_{i+1} > Q.y))$$

und für den Schnittpunkt $(x_0, Q.y)$ gilt: $x_0 > Q.x$.

2. $P_i P_{i+1}$ erzeugt einen Gebietswechsel genau dann, wenn:

$$\begin{aligned} & ((P_i.y = Q.y) \wedge (P_i.x > Q.x) \wedge (P_{i+1} < Q.y)) \vee \\ & ((P_{i+1}.y = Q.y) \wedge (P_{i+1}.x > Q.x) \wedge (P_i < Q.y)). \end{aligned}$$

Gebietswechsel liegen also nur bei solchen Kanten vor, deren einer Eckpunkt rechts von $Q.x$ auf dem Halbstrahl und deren anderer Endpunkt unter dem Halbstrahl liegt. Der Algorithmus lautet:

```
begin
  zaehler := 0;
  for alle Kanten k = P_i P_{i+1} do begin
    if (k schneidet Halbstrahl) or (k erzeugt Gebietswechsel)
      then zaehler++;
    end;
  in := ((zaehler mod 2) = 1);
end;
```

Betrachten wir einen inneren Knoten P_0 (siehe Abbildung 10), der von den acht Nachbarn P_1, \dots, P_8 umgeben ist. Wir bestimmen die ideale Position $C(x_c, y_c)$ für den inneren Knoten P_0 , so daß die Energie der vier Flächenelemente gleich groß ist. Dazu gewichten wir die Flächen A_1, \dots, A_4 mit der in ihnen jeweils enthaltenen Energien a, \dots, d . Die Bedingungen lauten dann

$$aA_1 + bA_2 = cA_3 + dA_4, \quad (21)$$

$$aA_1 + cA_3 = bA_2 + dA_4. \quad (22)$$

Wenn wir diese Bedingungen mit den Koordinaten der acht Nachbarknoten P_1, \dots, P_8 und der idealen Position $C(x_c, y_c)$ ausdrücken, erhalten wir zwei lineare Gleichungen für die Unbekannten x_c und y_c . Dieses Gleichungssystem wurde mit Mathematica gelöst. Die Lösungen wurden noch mit Magma vereinfacht. Die neue Position P'_0 berechnet sich wie in der Gleichung 3.

Die Randknoten müssen auch wie in den vorigen Beispielen getrennt behandelt werden. Betrachten wir einen Randknoten P_0 , der kein Eckpunkt ist (siehe Abbildung 12). Die Bedingung, daß die beiden Flächenelemente die gleiche Energie enthalten, lautet

$$aA_1 = bA_2. \quad (23)$$

Mit dieser Bedingung ist eine Gerade festgelegt, auf der sich die ideale Position C befindet. Eine zweite Bedingung, die die Position C eindeutig festlegt, ergibt sich aus der Tatsache, daß sie auf dem Rand liegen muß. Da wir ein quadratisches Signalfenster benutzen, sind die Ränder achsenparallele Strecken.

Betrachten wir zwei Beispiel für Netze, die mit der oben beschriebenen Methode berechnet wurden. In der Abbildung 22 ist das zur Marilyn gehörende Netz gezeigt. Man kann deutlich erkennen, daß die Maschen die über dem Mund liegen größer sind als die anderen, weil die Energie dort sehr klein ist. In der Abbildung 23 ist das zu einem zweidimensionalen Gauss-

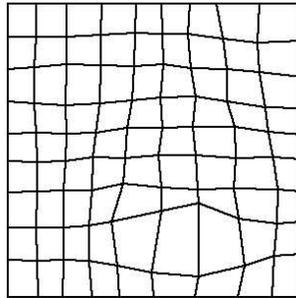


Abbildung 22: Das zu Marilyn gehörende Netz.

Signal gehörende Netz zu sehen. Die Maschengröße nimmt zur Mitte hin ab, da die Energie in der Mitte sehr groß ist und nach außen exponentiell abnimmt. Es soll ein Netz für das Signal in Abbildung 24 mit $s = 10$ generiert

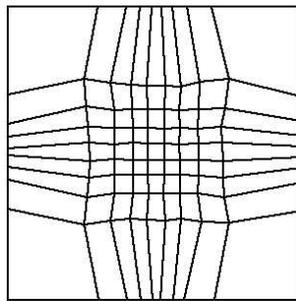


Abbildung 23: Das zu einem zweidimensionalen Gauss-Signal gehörende Netz.

werden. In der Abbildung 25 ist die Standard- und maximale Abweichung der in den Netzmaschen enthaltenen Energien von der optimalen Energie in Abhängigkeit der Anzahl der Iterationen aufgetragen.

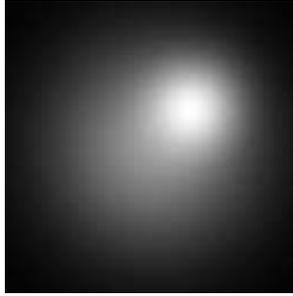


Abbildung 24: Ein inseparables Signal.

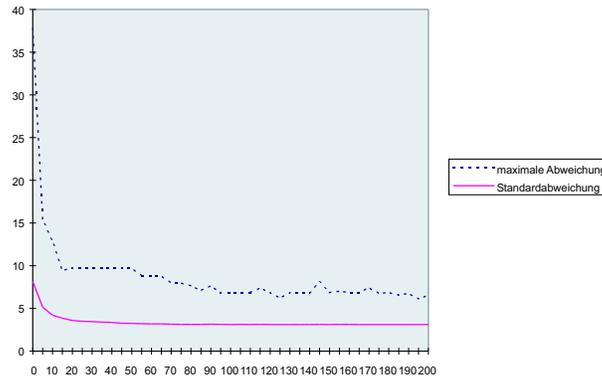


Abbildung 25: Konvergenzverhalten in Abhängigkeit der Iterationen.

4.4 Bestimmung der Phasenfunktion

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ des Phasenelements mit den zuvor generierten Netzen berechnet werden kann. Es wird die Idee aus [Dre96] verwendet. Für jedes (i, j) -Paar haben wir die Koordinaten (x^{ij}, y^{ij}) des zugehörigen Knotens in der Eingabeebene $in(i, j)$ und die Koordinaten $(\phi_x^{ij}, \phi_y^{ij})$ des zugehörigen Knotens $out(i, j)$ in der Ausgabeebene. Wir müssen ein Phasenelement realisieren, daß die Energie der finiten Flächenelemente in der Eingabeebene E in die jeweils korrespondierenden finiten Flächenelemente in der Ausgabeebene A ablenkt.

Wir nehmen an, daß die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ des Phasenelements durch ein bivariates Polynom vom Grad $D - 1$ angenähert werden kann, d.h.

$$\phi(x, y) = \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{l=0}^{D-1-k} a_{kl} \cdot x^k y^l,$$

wobei die a_{kl} die Koeffizienten des Polynoms in Abhängigkeit von Koordinaten der in - und out -Knoten zu bestimmen sind. Der Koeffizient a_{00} kann oBdA $a_{00} = 0$ gesetzt werden, da die konstante Phase uninteressant ist. Nach der Methode der stationären Phase muß für die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ eines

Phasenelements

$$\nabla\phi(x, y) = c \cdot T(x, y)$$

gelten, damit das Phasenelement die geometrische Transformation T realisiert. Für die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ muß also

$$\begin{aligned}\partial\phi(x_{ij}, y_{ij})/\partial x &= c \cdot \phi_x^{ij}, \\ \partial\phi(x_{ij}, y_{ij})/\partial y &= c \cdot \phi_y^{ij}\end{aligned}$$

für alle (i, j) -Paare gelten. Die partiellen Ableitungen des Polynoms $\phi(x, y)$ sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{l=0}^{D-1-k} k \cdot a_{kl} \cdot x^{k-1} y^l, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{l=0}^{D-1-k} l \cdot a_{kl} \cdot x^k y^{l-1}.\end{aligned}$$

Wir bestimmen den Koeffizientenvektor $\underline{a} = (a_{kl})$ mit der Methode der kleinsten Quadrate angewandt auf die partiellen Ableitungen $\partial\phi/\partial x$ und $\partial\phi/\partial y$, deren Werte für alle (i, j) -Paare bekannt sind. Dazu definieren wir eine Funktion $g(\underline{a})$ durch

$$g(\underline{a}) = \sum_{i,j} \left\{ \left[\left(\sum_{k,l} k \cdot a_{kl} \cdot x_{ij}^{k-1} y_{ij}^l \right) - \phi_x^{ij} \right]^2 + \left[\left(\sum_{k,l} l \cdot a_{kl} \cdot x_{ij}^k y_{ij}^{l-1} \right) - \phi_y^{ij} \right]^2 \right\}.$$

Um $g(\underline{a})$ zu minimieren, müssen die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial a_{kl}} &= \sum_{i,j} 2 \left[\left(\sum_{m,n} m \cdot a_{mn} \cdot x_{ij}^{m-1} y_{ij}^n \right) - \phi_x^{ij} \right] \cdot k \cdot x_{ij}^{k-1} y_{ij}^l + \\ & 2 \left[\left(\sum_{m,n} n \cdot a_{mn} \cdot x_{ij}^m y_{ij}^{n-1} \right) - \phi_y^{ij} \right] \cdot l \cdot x_{ij}^k y_{ij}^{l-1}\end{aligned}$$

für alle a_{kl} verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial g(\underline{a})}{\partial a_{kl}} \stackrel{!}{=} 0.$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \left(k \cdot x_{ij}^{k-1} y_{ij}^l \cdot \phi_x^{ij} + l \cdot x_{ij}^k y_{ij}^{l-1} \cdot \phi_y^{ij} \right) = \\ \sum_{i,j} \sum_{m,n} \left(m \cdot a_{mn} \cdot x_{ij}^{m-1} y_{ij}^n \cdot k \cdot x_{ij}^{k-1} y_{ij}^l + n \cdot a_{mn} \cdot x_{ij}^m y_{ij}^{n-1} \cdot l \cdot x_{ij}^k y_{ij}^{l-1} \right).\end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten a_{mn} . Die Einträge $m_{row,col}$ der zugehörigen Matrix sind

$$m_{row,col} = \sum_{i,j=0}^{s-1} m \cdot k \cdot x_{ij}^{m-1+k-1} \cdot y_{ij}^{n+1} + n \cdot l \cdot x_{ij}^{m+k} \cdot y_{ij}^{n-1+l-1}, \quad (24)$$

wobei

$$\begin{aligned} row &= l \cdot (2D - l + 1)/2 + k, \\ col &= n \cdot (2D - n + 1)/2 + m \end{aligned}$$

gesetzt sind. Die Einträge $m_{row,D(D+1)/2}$ des zugehörigen Lösungsvektors sind

$$m_{row,D(D+1)/2} = \sum_{i,j=0}^{s-1} k \cdot \phi_x^{ij} \cdot x_{ij}^{k-1} \cdot y_{ij}^l + l \cdot \phi_y^{ij} \cdot x_{ij}^k \cdot y_{ij}^{l-1}. \quad (25)$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit der Gaußelimination und erhalten die Lösungen der Koeffizienten a_{mn} . Damit ist die Phasenfunktion $\phi(x, y)$ bekannt und wir können das Phasenelement angeben.

5 Vergleich

Um die Methode der finiten Elemente mit anderen Methoden zu vergleichen, brauchen wir geeignete Gütemaße, mit denen sich die Qualität diffraktiver Phasenelemente quantitativ beschreiben läßt. Das Signal-Rausch-Verhältnis beschreibt, wie der Name schon sagt, das Verhältnis der Energie des Signals zur Energie des Rauschens, welches das Signal überlagert. Das Signal ist in diesem Fall das gewünschte Ausgabesignal f_2 , das durch die Funktion $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist. Das Rauschen ergibt sich aus der Abweichung des mit diffraktiven Phasenelement (DPE) erzeugten Signals $f(x) = \mathcal{F}\{f_1 T_{DPE}\}(x)$ vom gewünschten Ausgabesignal f_2 , wobei lediglich die Energie innerhalb eines begrenzten Bereichs, dem Signalfenster W_{Signal} , betrachtet wird.

Die SNR wird für das gewünschte Ausgabesignal f_2 und das Signal f , die beide als Intensitätssignale betrachtet werden, wie folgt definiert:

$$\text{SNR}_I(f_2, f) = \frac{\|f\|_{W_{Signal}}^2}{\| |f_2| - \alpha |f| \|_{W_{Signal}}^2}$$

mit dem Skalierungsfaktor

$$\alpha = \frac{\langle |f|, |f_2| \rangle_{W_{Signal}}}{\|f\|_{W_{Signal}}^2}.$$

Dieser Skalierungsfaktor wird benötigt, da die Skalierung unwichtig für den Informationsgehalt des Signals ist, den die SNR messen soll. Die SNR ist

ein Maß für die Übereinstimmung des vom diffraktiven Element erzeugten Signals f und des gewünschten Signals f_2 .

Die Beugungseffizienz η ist durch den Quotienten der Energie der durch das diffraktive Phasenelement erzeugten Wellenfront f innerhalb des Signalfensters W_{Signal} und der Energie der Beleuchtungswelle f_1 im DE-Fenster W_{DE} gegeben.

$$\eta = \frac{\|f\|_{W_{Signal}}}{\|f_1\|_{W_{DE}}^2}$$

Die Beugungseffizienz ist damit der Anteil der Energie der Beleuchtungswelle, die das Signalfenster erreicht und damit ein Maß für die Energieausnutzung des diffraktiven Elements.

Es folgt eine Gegenüberstellung der verschiedenen Methoden für die Berechnung eines Startwerts für den IFTA. Zum Vergleich berechnete der IFTA von den Startwerten ausgehend ein kontinuierliches Phasenelement, wobei 10 Iterationen zur Verbesserung der Beugungseffizienz und 20 Iterationen zur Verbesserung der SNR durchgeführt wurden.

Bei der Abbildung eines Kreises mit konstanter Intensität auf Marilyn liefert die Methode der finiten Flächenelemente den besten Startwert.

Kreis \mapsto Marilyn

Verfahren	SNR in dB	η in %
SepOp	19,3	78,6
Kugel	16,9	75,1
Zufall	13,8	68,9
Mesh	20,83	79

Bei der Abbildung des inseparablen Signals in der Abbildung 24 auf Marilyn liefert die Methode der finiten Flächenelemente das beste Signal-Rausch-Verhältnis.

insep \mapsto Marilyn

Verfahren	SNR in dB	η in %
SepOp	32,8	92,1
Kugel	31,1	83
Zufall	30,6	84,1
Mesh	35.81	86

Bei der Abbildung des Quadrats mit konstanter Intensität auf Marilyn liefert die Methode der finiten Flächenelemente das beste Signal-Rausch-Verhältnis.

Quadrat \mapsto Marilyn

Verfahren	SNR in dB	η in %
SepOp	20,8	79,1
Kugel	20,4	77,8
Zufall	13,9	68,2
Mesh	20.52	78

Bei der Abbildung eines zweidimensionalen Gauss-Signals auf Marilyn liefert der Separabilisierungsoperator den besten Startwert.

Gauss \mapsto Marilyn

Verfahren	SNR in dB	η in %
SepOp	31,4	92,5
Kugel	27,5	84,2
Zufall	23,6	84
Mesh	29.89	83

Bei der Abbildung eines Kreises auf ein Quadrat ist die Methode der finiten Flächenelemente schlechter als die adaptierte Kugelphase.

Kreis \mapsto Quadrat

Verfahren	SNR in dB	η in %
SepOp	24,9	82,6
Kugel	25,9	81,8
Zufall	14,6	71,4
Mesh	18.26	76

6 Schlußbetrachtung

Die Methode der finiten Elemente ist eine neue Methode, geeignete Startwerte für IFTA zu berechnen. Diese Methode liefert bei einigen Fälle bessere Ergebnisse als die bisherigen Verfahren. Ein Nachteil der Methode der finiten Elemente im Vergleich zum SepOp ist, daß die Parameter s , die Anzahl der Knoten, und D , der Grad des Polynoms, richtig gewählt werden müssen. Bei den obigen Beispielen wurden viele Parameterkombinationen ausprobiert und jeweils das beste Ergebnis genommen. Das ist aufwendig im Vergleich zum Separabilisierungsoperator, bei dem keine Parameter festgelegt werden müssen. Allgemein läßt sich sagen, daß die Ergebnisse besser werden, je mehr Knoten verwendet werden. Allerdings darf man nicht zu viele Knoten nehmen, da ihre Koordinaten in Pixel umgerechnet werden. Der Grad D sollte kleiner gleich der Hälfte der Knotenanzahl s gewählt werden, weil sonst Überschwinger bei der Approximation entstehen.

Literatur

- [Aag93] H.Aagedal, *Optische Implementierung linearer Transformationen mittels diffraktiver Elemente*, Diplomarbeit am Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme, Universität Karlsruhe
- [Aag97] H.Aagedal, M.Schmid, S.Egner, J.Müller-Quade, Th.Beth, F.Wyrowski, Analytical beam shaping with application to laser diode arrays, Vol. 14, No. 7/July, 1997, Journal of Optical Society of America A
- [Atk94] J.E.Atkin, *Finite Elements for Analysis and Design*, Academic, London, 1994
- [Fie80] J.R.Fienup, *Iterative method applied to image reconstruction and to computer-generated holograms*, Vol. 19, 1980, Optical Engineering
- [Ger72] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, *A practical algorithm for the determination of phase image and diffraction plane pictures*, Optik (Stuttgart) 35, 237-264 (1972)
- [Dre96] T. Dresel, M. Beyerlein, J. Schwider, *Design and fabrication of computer-generated beam-shaping holograms*, Applied Optics 35, 4615-4621 (1996)
- [Dre97] T.Dresel, M.Beyerlein, J.Schwider, *Design of computer-generated beam-shaping holograms by iterative finite-element mesh adoption*, Applied Optics 35, 6865-6874, (1996)
- [Schm96] Schmidt, Deussen, Kreeb, *Einführung in graphisch-geometrische Algorithmen*, Teubner, 1996
- [Wyr88] F.Wyrowski, O.Bryngdahl, *Iterative Fourier-transform algorithm applied to computer holography*, Vol. 5, No. 5/July, 1988, Journal of Optical Society of America A